第 31 講　複素数と方程式(2)

例題 31 ― 1

2 次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(ア)　$\alpha^2+\beta^2$　　(イ)　$\alpha^3+\beta^3$　　(ウ)　$(\alpha-\beta)^2$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 31 ー 1

2 次方程式 $2x^2-8x+5=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 31 － 2

(1)　次の条件を満たすような定数 a の値をそれぞれ求めよ．

　(ア)　$2x^4+3x^3-ax+1$ を $x+2$ で割ると余りが 1 である．

　(イ)　$x^3+ax+a+1$ が $x-3$ で割り切れる．

(2)　整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは 1，$x+2$ で割ると余りは 7 となる．このとき，$P(x)$ を x^2+x-2 で割った余りを求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 31 ー 2

(1)　$6x^3+ax^2-3x-9$ が $2x+3$ で割り切れるとき，定数 a の値を求めよ.

(2)　整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると -1 余り，$x+3$ で割ると 9 余る．このとき $P(x)$ を x^2+x-6 で割った余りを求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 31 ー 3

次の方程式を解け.

(1)　$x^3+4x^2+x-6=0$　　(2)　$x^4-2x^3-x^2-4x-6=0$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題31－3

次の方程式を解け.

(1)　$2x^3-5x^2-x+6=0$　　(2)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 31 ー 4

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が -1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．

(2)　方程式 $x^3=1$ の解のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，$\omega^8+\omega^4$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 31 ー 4

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ が 1 と 3 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．

(2)　1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，$\omega^{11}+\omega^{10}+1$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 31 講　複素数と方程式(2)

(1)　2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の解を α，β とすると，$\alpha^2+\beta^2=-$ ア ，

$\alpha^3+\beta^3=$ イウ である．

(2)　$2x^3+ax^2+bx+6$ は $x+2$ で割り切れ，$x-3$ で割ると 30 余る．このとき

$a=-$ エ ，$b=-$ オ である．

(3)　方程式 $3x^3-x^2-8x-4=0$ の解は　$x=$ カ ，$-$ キ ，$-\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 31 講　複素数と方程式(2)

例題 31 ー 1

2 次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(ア)　$\alpha^2+\beta^2$　　(イ)　$\alpha^3+\beta^3$　　(ウ)　$(\alpha-\beta)^2$

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{2}=1$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

(ア)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{0}$

(イ)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1=\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

(ウ)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1^2-4\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{-1}$

類題 31 ー 1

2 次方程式 $2x^2-8x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{-8}{2}=4$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot\dfrac{5}{2}=16-5=\mathbf{11}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot\dfrac{5}{2}\cdot4=64-30=\mathbf{34}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 31 － 2

(1)　次の条件を満たすような定数 a の値をそれぞれ求めよ．

　(ア)　$2x^4+3x^3-ax+1$ を $x+2$ で割ると余りが 1 である．

　(イ)　$x^3+ax+a+1$ が $x-3$ で割り切れる．

(2)　整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは 1，$x+2$ で割ると余りは 7 となる．このとき，$P(x)$ を x^2+x-2 で割った余りを求めよ．

(1)　(ア)　$P(x)=2x^4+3x^3-ax+1$　とおくと，$Q(x)$ を整式として

$P(x)=2x^4+3x^3-ax+1=(x+2)Q(x)+1$　とおける．

$P(-2)=1$　より　$2\cdot(-2)^4+3\cdot(-2)^3-a(-2)+1=1$

$2a+9=1$

よって　$\boldsymbol{a=-4}$

(イ)　$P(x)=x^3+ax+a+1$　とおくと，$Q(x)$ を整式として

$P(x)=x^3+ax+a+1=(x-3)Q(x)$　とおける．

$P(3)=0$　より　$3^3+a\cdot3+a+1=0$　　　$4a+28=0$

よって　$\boldsymbol{a=-7}$

(2)　$P(x)$ を x^2+x-2　つまり　$(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$　とおける．

$P(x)$ を $x-1$ で割ると余り 1 より　$P(1)=1$　　よって　$a+b=1$　……①

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余り 7 より　$P(-2)=7$　　よって　$-2a+b=7$　……②

①，②より　$a=-2$，$b=3$

ゆえに，求める余りは　$\boldsymbol{-2x+3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 31 ー 2

(1)　$6x^3+ax^2-3x-9$ が $2x+3$ で割り切れるとき，定数 a の値を求めよ．

(2)　整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると -1 余り，$x+3$ で割ると 9 余る．このとき $P(x)$ を x^2+x-6 で割った余りを求めよ．

(1)　$P(x)=6x^3+ax^2-3x-9$　とおくと，$Q(x)$ を整式として

$$P(x)=6x^3+ax^2-3x-9=(2x+3)Q(x)$$

$P\left(-\frac{3}{2}\right)=0$　より　$6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+a\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-9=0$

よって　$\boldsymbol{a=11}$

(2)　$P(x)$ を x^2+x-6　つまり　$(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$　とおける．

$P(x)$ を $x-2$ で割ると余り -1 より　$P(2)=-1$　　よって　$2a+b=-1$　……①

$P(x)$ を $x+3$ で割ると余り 9 より　$P(-3)=9$　　よって　$-3a+b=9$　……②

①，②より　$a=-2$，$b=3$

ゆえに，求める余りは　$\boldsymbol{-2x+3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 31 ー 3

次の方程式を解け.

(1)　$x^3+4x^2+x-6=0$　　(2)　$x^4-2x^3-x^2-4x-6=0$

(1)　$x^3+4x^2+x-6=0$　より

$(x-1)(x^2+5x+6)=0$

$(x-1)(x+2)(x+3)=0$

よって　$\boldsymbol{x=1,\ -2,\ -3}$

1	4	1	−6	1
	1	5	6	
1	5	6	0	

(2)　$x^4-2x^3-x^2-4x-6=0$　より

$(x+1)(x^3-3x^2+2x-6)=0$

$(x+1)(x-3)(x^2+2)=0$

よって　$\boldsymbol{x=-1,\ 3}$

1	−2	−1	−4	−6	−1
	−1	3	−2	6	
1	−3	2	−6	0	3
	3	0	6		
1	0	2	0		

（複素数の範囲で解くと，$x=-1,\ 3,\ x^2+2=0$　　つまり　$x=-1,\ 3,\ \pm\sqrt{2}\,i$）

類題 31 ー 3

次の方程式を解け.

(1)　$2x^3-5x^2-x+6=0$　　(2)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$

(1)　$2x^3-5x^2-x+6=0$　より

$(x+1)(2x^2-7x+6)=0$

$(x+1)(2x-3)(x-2)=0$

よって　$\boldsymbol{x=-1,\ \frac{3}{2},\ 2}$

2	−5	−1	6	−1
	−2	7	−6	
2	−7	6	0	

(2)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$　より

$(x-1)(x^3+4x^2-x-4)=0$

$(x-1)^2(x^2+5x+4)=0$

$(x-1)^2(x+1)(x+4)=0$

よって　$\boldsymbol{x=1,\ -1,\ -4}$

1	3	−5	−3	4	1
	1	4	−1	−4	
1	4	−1	−4	0	1
	1	5	4		
1	5	4	0		

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題31－4

(1)　3次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が -1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．

(2)　方程式 $x^3=1$ の解のうち，虚数であるものの1つを ω とするとき，$\omega^8+\omega^4$ の値を求めよ．

(1)　$x=-1,\ 2$ が解であるから，それぞれ代入して

$$\begin{cases} -1+a-b-6=0, \\ 8+4a+2b-6=0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} a-b=7, \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=-5}$

このとき与えられた方程式は　$x^3+2x^2-5x-6=0$

これを変形して　$(x+1)(x-2)(x+3)=0$

したがって他の解は　$\boldsymbol{x=-3}$

(別解)　他の解を $x=\alpha$ とおくと，与えられた方程式は

$(x+1)(x-2)(x-\alpha)=0$　と変形できる．

この式の左辺を展開して　$x^3-(\alpha+1)x^2+(\alpha-2)x+2\alpha=0$

これを　$x^3+ax^2+bx-6=0$　と比較して

$-\alpha-1=a$，$\alpha-2=b$，$2\alpha=-6$

よって　$\alpha=-3$，$a=2$，$b=-5$

(2)　$x^3=1$ より

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$，$x^2+x+1=0$

よって ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解である．

ゆえに　$\omega^2+\omega+1=0$　　また　$\omega^3=1$

したがって　$\omega^8+\omega^4=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=\boldsymbol{-1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 31 － 4

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ が 1 と 3 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．

(2)　1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，$\omega^{11}+\omega^{10}+1$ の値を求めよ．

(1)　$x=1$，3 が解であるから，それぞれ代入して

$$\begin{cases} 1+a-21+b=0, \\ 27+9a-63+b=0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} a+b=20, \\ 9a+b=36 \end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=18}$

このとき与えられた方程式は　$x^3+2x^2-21x+18=0$

これを変形して　$(x-1)(x-3)(x+6)=0$　　したがって他の解は　$\boldsymbol{x=-6}$

(別解)　他の解を $x=\alpha$ とおくと，与えられた方程式は

$(x-1)(x-3)(x-\alpha)=0$　と変形できる．

この式の左辺を展開して　$x^3-(\alpha+4)x^2+(4\alpha+3)x-3\alpha=0$

これを　$x^3+ax^2-21x+b=0$　と比較して

$-\alpha-4=a$，$4\alpha+3=-21$，$-3\alpha=b$　　よって　$\alpha=-6$，$a=2$，$b=18$

(2)　ω は 1 の 3 乗根，すなわち方程式 $x^3=1$ の解より　$\omega^3=1$

また　$x^3=1$ より

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$，$x^2+x+1=0$

よって ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解である．

ゆえに　$\omega^2+\omega+1=0$

したがって　$\omega^{11}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^3\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=\boldsymbol{0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 31 講　複素数と方程式(2)

(1)　2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の解を α, β とすると，$\alpha^2+\beta^2=-$ ア ，
$\alpha^3+\beta^3=$ イウ である．

(2)　$2x^3+ax^2+bx+6$ は $x+2$ で割り切れ，$x-3$ で割ると 30 余る．このとき
$a=-$ エ ，$b=-$ オ である．

(3)　方程式 $3x^3-x^2-8x-4=0$ の解は　$x=$ カ ，$-$ キ ，$-\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である．

解答例

(1)　解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{1}=-2$，$\alpha\beta=\dfrac{3}{1}=3$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot3=\mathbf{-2}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-2)^3-3\cdot3\cdot(-2)=-8+18=\mathbf{10}$

(2)　$P(x)=2x^3+ax^2+bx+6$　とおくと，$Q_1(x)$ を整式として

$P(x)=2x^3+ax^2+bx+6=(x+2)Q_1(x)$　とおける．

$P(-2)=0$　より　$-16+4a-2b+6=0$

よって　$2a-b=5$　……①

また $Q_2(x)$ を整式として，$P(x)=2x^3+ax^2+bx+6=(x-3)Q_2(x)+30$　とおける．

$P(3)=30$　より　$P(3)=54+9a+3b+6=30$

よって　$3a+b=-10$　……②

①，②より　$a=\mathbf{-1}$，$b=\mathbf{-7}$

(3)　$3x^3-x^2-8x-4=0$　より

$(x+1)(3x^2-4x-4)=0$

$(x+1)(3x+2)(x-2)=0$

よって　$x=\mathbf{2}$，$\mathbf{-1}$，$\mathbf{-\dfrac{2}{3}}$

3	−1	−8	−4	−1
	−3	4	4	
3	−4	−4	0	

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。